Übungsklausur Geometrie 2 (Wintergarten)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben sind die Ebene $E:\ 3x_1 + 4x_2 = 12$ und die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass g parallel zu E ist.
b) Bestimme den Abstand der Geraden g von der Ebene E. (4VP)

2) Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen

$E_1:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $E_2:\ 2x_1 + x_2 = 4$. (3VP)

3) Zeige, dass die Schnittwinkel der Geraden

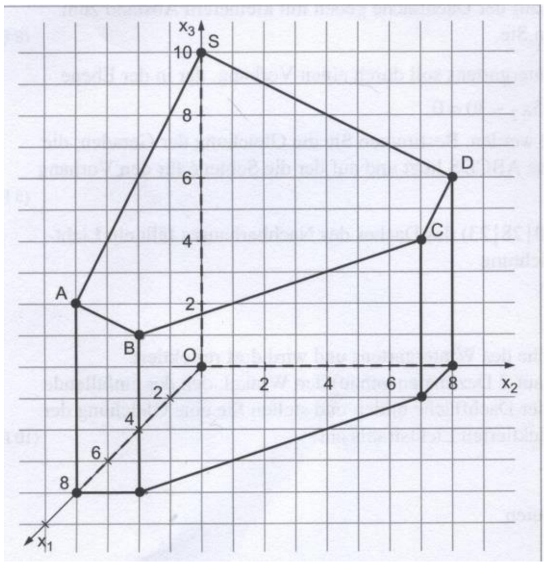
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit den Ebenen $E: 2x_1 + 3x_2 = 2$ und $F: 3x_1 + 2x_3 = 4$ gleich groß sind. (3VP)

4) Zeige, dass das Dreieck PQR mit P(2 | –1 | 0), Q(4 | –3 | –1) und R(3 | 1 | –2) rechtwinklig und gleichschenklig ist. Ergänze das Dreieck durch einen vierten Punkt S zu einem Quadrat. (3VP)

5) Gegeben ist eine Gerade g im Raum und ein Punkt P, der nicht auf g liegt. Der Punkt P wird an der Geraden g gespiegelt. Beschreibe ein Verfahren zur Bestimmung des Bildpunktes P'. Fertige dazu eine Skizze an. (2VP)

Übungsklausur Geometrie 2 (Wintergarten)
Wahlteil (zu bearbeiten mit WTR und Merkhilfe)



Die Abbildung zeigt die Skizze eines Wintergartens. Dabei liegen die Punkte A(8|0|6), B(8|2|5), C(2|8|5), D(0|8|6) und S(0|0|10) in der Dachebene E (Alle Angaben in Metern).

a) (1) Stelle eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform auf.
(2) Untersuche, ob die Dachfläche ABCDS die vor allem im Winter wichtige Minimalneigung von 35° gegenüber der Bodenfläche (x_1x_2 – Ebene) aufweist.
(3) Die Bodenfläche des Wintergartens soll mit Marmorfliesen ausgelegt werden. Wie teuer wird der Boden, wenn 1m² 48,80€ kostet?
(Teilergebnis: $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$) (4VP)

b) Beim Bau des Wintergartens wird eine Strebe S_1 benutzt, die senkrecht auf der Dachfläche ABCDS steht und im Boden im Punkt P(2|2|0) verankert ist.
(1) In welchem Punkt berührt die Strebe S_1 das Dach?
(2) Wie lang ist die Strebe S_1? (3VP)

c) Damit die Strebe S_1 wieder abgebaut werden kann, wird zur Stabilisierung der Dachfläche von einem Träger T_1T_2 mit T_1(10|0|8) und T_2(0|10|8) aus ein Zugseil zur Dachfläche ABCDS gespannt. Der Träger befindet sich oberhalb der Dachfläche.
(1) Berechne den Abstand des Punktes A zum Träger T_1T_2.
(2) Kann es Punkte auf der Dachfläche geben mit kleinerem Abstand zum Träger? Begründe deine Entscheidung! (4VP)

d) Vom Punkt Z(22|8|3) einer Laterne fällt ein Lichtstrahl mit der Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die Vorderfront des Wintergartens (das ist die Fläche, in der die Punkte A und B liegen) und wird dort reflektiert.
(1) Berechne den Winkel, den der einfallende Lichtstrahl mit der Wand des Wintergartens einschließt.
(2) Stelle eine Gleichung des reflektierten Lichtstrahls auf. (4VP)

Übungsklausur Geometrie 2 (Wintergarten)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $\vec{n_E} \cdot \vec{m_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow \vec{n_E} \perp \vec{m_g} \Rightarrow g \parallel E$ (1,5P)

b) HNF von E: $\frac{3x_1 + 4x_2 - 12}{5} = 0$, Stützpunkt von g in HNF:

$d = \left| \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 12}{5} \right| = \left| \frac{-9}{5} \right| = \boxed{\frac{9}{5}}$ (2,5P) **4P**

2) $E_1: 3x_1 - x_2 + x_3 = b$ Setze (1|3|2) in E_1 ein $\Rightarrow b = 2$

$E_1: 3x_1 - x_2 + x_3 = 2$ (1P)

$E_2: \ 2x_1 + x_2 = 4$

Wähle $\boxed{x_1 = t} \Rightarrow \boxed{x_2 = 4 - 2t}$ in $E_1: 3t - 4 + 2t + x_3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = 6 - 5t}$

$\boxed{s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}}$ (2P) **3P**

3) $\sin\alpha = \frac{\left|\vec{m_g} \cdot \vec{n_E}\right|}{\left|\vec{m_g}\right| \cdot \left|\vec{n_E}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{39}}$ $\sin\beta = \frac{\left|\vec{m_g} \cdot \vec{n_F}\right|}{\left|\vec{m_g}\right| \cdot \left|\vec{n_F}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{39}}$

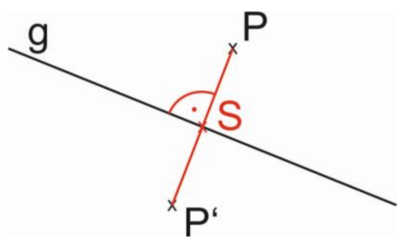
$\frac{5}{\sqrt{39}} = \frac{5}{\sqrt{39}} \Leftrightarrow \alpha = \beta$ **3P**

4) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \left|\vec{PQ}\right| = 3$ $\vec{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \left|\vec{PR}\right| = 3$ $\vec{QR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \left|\vec{QR}\right| = \sqrt{18}$ (1P)

$\left|\vec{PQ}\right| = \left|\vec{PR}\right| = 3 \Rightarrow$ gleichschenklig $\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 2 - 4 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{PQ} \perp \vec{PR} \Rightarrow$ rechtwinklig (1P)

$\vec{OS} = \vec{OQ} + \vec{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{S(5 \mid -1 \mid -3)}$ (1P) **3P**

5) Skizze (0,5P)



(1) Stelle eine Hilfsebene E auf, die senkrecht zu g verläuft und den Punkt P enthält:

$E: \left[\vec{x} - \vec{p}\right] \cdot \vec{m_g} = 0$ (0,5P)

(2) Schneide g und E, der Schnittpunkt ist S. (0,5P)

(3) $\vec{OP'} = \vec{OS} + \vec{PS}$ (0,5P) **2P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Geometrie 2 (Wintergarten)

Lösungen Wahlteil:

a) (1) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = b$ A in E: $b = 20$

$\boxed{E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 20}$ (1P)

(2) $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6}\sqrt{1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = \boxed{35{,}26^\circ} > 35^\circ$ Minimalneigung erfüllt (1,5P)

(3) $A_{Boden} = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 46 \Rightarrow 46m^2$

Kosten $= 46m^2 \cdot 48{,}80€ / m^2 = \boxed{2244{,}80€}$ (1,5P) **4P**

b) (1) $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (0,5P) l in E: $2 + s + 2 + s + 4s = 20 \Rightarrow s = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ $\boxed{S_1\left(\frac{14}{3} \mid \frac{14}{3} \mid \frac{16}{3}\right)}$ (1,5P)

(2) $\left|\overrightarrow{PS_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{128}{3}} \approx 6{,}53 \Rightarrow \boxed{6{,}53m}$ (1P) **3P**

c) (1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,5P)

Hilfesebene: $H: -x_1 + x_2 = -8$, g in H: $-10 + r + r = -8 \Leftrightarrow r = 1 \Rightarrow L(9 \mid 1 \mid 8)$

$\left|\overrightarrow{AL}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45 \Rightarrow \boxed{2{,}45m}$ (2P)

(2) Prüfe ob g parallel zu E: $\overrightarrow{m_g} \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{m_g} \perp \overrightarrow{n_E} \Rightarrow$ g parallel zu E

Abstand T_1 von E: $\dfrac{x_1 + x_2 + 2x_3 - 20}{\sqrt{6}} = 0: \ d = \left|\dfrac{10 + 0 + 2 \cdot 8 - 20}{\sqrt{6}}\right| = \sqrt{6} = \left|\overrightarrow{AL}\right|$

$\Rightarrow$ es kann keine weiteren Punkte mit kleinerem Abstand geben. (1,5P) **4P**

d) (1) $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,5P) Vorderfront des Wintergartens $V: x_1 = 8$ (0,5P)

$\sin(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 63{,}4^\circ}$ (1P)

(2) s in V: $22 - 2r = 8 \Leftrightarrow r = -7 \Rightarrow S(8 \mid 1 \mid 3)$ (1P) $\boxed{s': \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ (1P) **4P**

Summe: 15 Punkte